

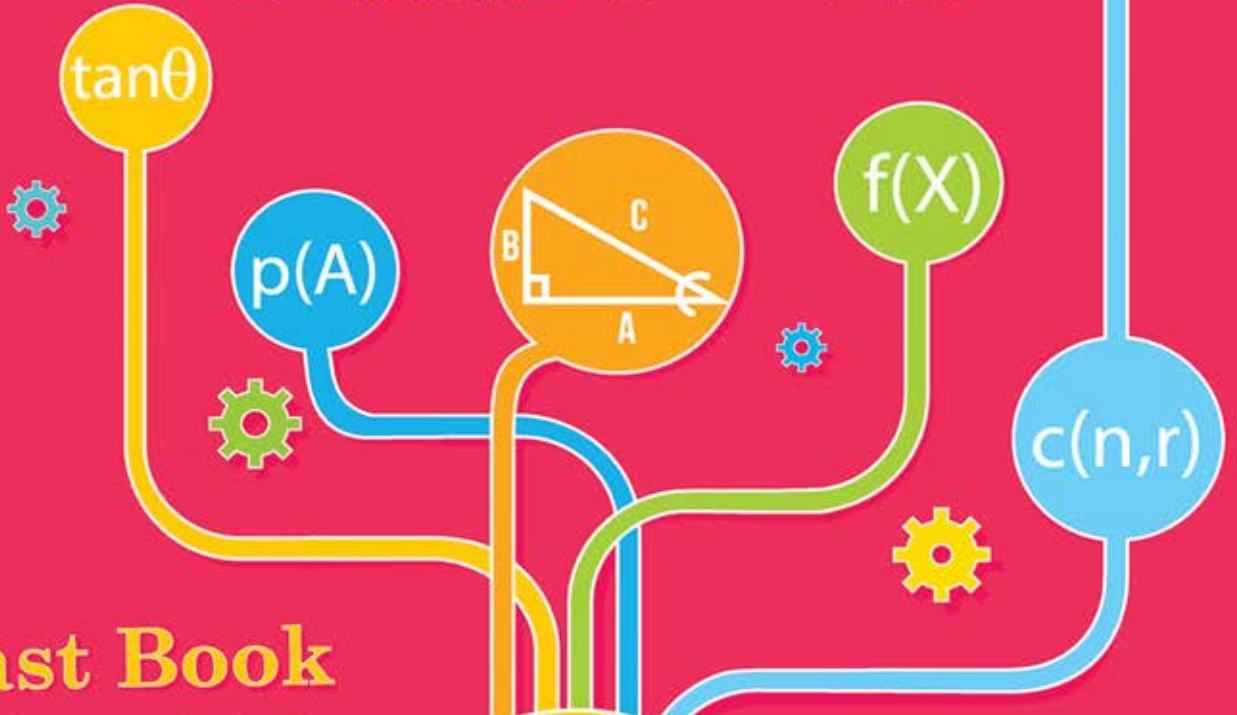


انتشارات لوح برتر

# فست بوک ریاضی دهم

آموزش سریع و آسان مفاهیم ریاضی دهم

ویژه رشته‌های تجربی و ریاضی



Fast Book  
Riyazi 10

نجمه قندالی  
فاطمه بوربور

# فست بوک ریاضی دهم

آموزش سریع و آسان مفاهیم ریاضی

ویژه رشته‌های تجربی و ریاضی

مؤلفان

نجمه قدالی، فاطمه بوربور

انتشارات لوح برتر



## فهرست

آموزش و تمرین	.....	۶
مثال و پاسخ	.....	۷
بیش‌تر بدانیم	.....	۳۴
تست‌های فصل	.....	۴۰
<b>فصل دوم: مثلثات</b>		
آموزش و تمرین	.....	۴۸
مثال و پاسخ	.....	۴۹
بیش‌تر بدانیم	.....	۶۸
تست‌های فصل	.....	۷۹
<b>فصل سوم: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری</b>		
آموزش و تمرین	.....	۸۶
مثال و پاسخ	.....	۸۷
بیش‌تر بدانیم	.....	۱۲۰
تست‌های فصل	.....	۱۲۹
<b>فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها</b>		
آموزش و تمرین	.....	۱۳۶
مثال و پاسخ	.....	۱۳۷
بیش‌تر بدانیم	.....	۱۸۲
تست‌های فصل	.....	۱۹۰
<b>آزمون نوبت اول</b>		
آزمون نوبت اول	.....	۱۹۹
<b>فصل پنجم: تابع</b>		
آموزش و تمرین	.....	۲۰۴
مثال و پاسخ	.....	۲۰۵
بیش‌تر بدانیم	.....	۲۳۶
تست‌های فصل	.....	۲۴۶
<b>فصل ششم: شمارش، بدون شماردن</b>		
آموزش و تمرین	.....	۲۵۴
مثال و پاسخ	.....	۲۵۵
بیش‌تر بدانیم	.....	۲۶۸
تست‌های فصل	.....	۲۷۳
<b>فصل هفتم: آمار و احتمال</b>		
آموزش و تمرین	.....	۲۸۰
مثال و پاسخ	.....	۲۸۱
بیش‌تر بدانیم	.....	۲۹۴
تست‌های فصل	.....	۲۹۸
<b>آزمون نوبت دوم</b>		
آزمون نوبت دوم	.....	۳۰۹

برای افزایش مهارت تست‌زنی به کتاب دوم این مجموعه به نام  
«تست ریاضی فست‌بوک دهم» مراجعه کنید.

برنام اول که هر چه داریم از اوست

### مقدمه ناشر

با استقبال بی نظیر دانش آموزان عزیز از فست بوک های ریاضی هفتم، هشتم و نهم و درخواست بسیاری از دبیران فرهیخته متوسطه دوم، با عنایت پروردگار و همت گروه مؤلفان توانستیم مجموعه حاضر را با نام «**فست بوک ریاضی دهم**» ویژه رشته های تجربی و ریاضی با رویکرد آموزشی، یک صفحه آموزش و تمرین، یک صفحه مثال و پاسخ، طراحی و تدوین کنیم.

برای آشنایی بیش تر شما عزیزان با این مجموعه، برخی از ویژگی های اصلی آن را با هم مرور می کنیم:  
۱- کتاب حاضر کلیه مباحث کتاب درسی پایه دهم رشته تجربی و ریاضی را مطابق کتاب جدید التالیف در برمی گیرد. مؤلفان این مجموعه تمام تلاش خود را به کار برده اند تا همه نکات کلیدی درس ها و تمرین های کتاب درسی را آموزش دهند.

۲- سعی کرده ایم با زبانی ساده و روان، تمام مفاهیم ریاضی را آموزش دهیم. به طور کلی ساختار این کتاب به گونه ای است که صفحات زوج به آموزش و تمرین و صفحات فرد به حل مثال اختصاص داده شده است.  
۳- برای دانش آموزان مستعدتر، در پایان هر فصل، مطالبی فراتر از سطح کتاب درسی با نام «بیش تر بدانیم» ارائه شده است.

۴- در پایان هر فصل انواع تست های کنکور و تالیفی با پاسخ های کاملاً تشریحی و آموزشی مطابق با کتاب درسی ارائه شده است.

۵- یک دوره آزمون های تشریحی ۲۰ نمره ای ویژه نیم سال اول و یک دوره آزمون پایان سال تکمیل کننده این مجموعه است.

۶- برای حل تست های بیش تر به «کتاب تست ریاضی فست بوک دهم» مراجعه کنید.  
حجم مناسب و جامع بودن این کتاب برای دانش آموزان هیجان انگیز است. ساختار این مجموعه به گونه ای است که کار دبیر در انتقال مفاهیم ریاضی به دانش آموزان، ساده و آسان می شود.  
امید است این مجموعه مورد استقبال دبیران فرهیخته، دانش آموزان عزیز و اولیای گرامی قرار گیرد.  
شما عزیزان می توانید نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق پل های ارتباطی زیر با ما در میان بگذارید.

صادق گرجی

مدیر انتشارات لوح برتر

پل های ارتباطی شما با ما

۶۶۹۷۲۴۷۸

۶۶۹۷۱۸۰۴

۶۶۹۷۱۹۷۰

۶۶۱۷۵۰۵۳

کانال انتشارات @Lohebartarpub

شماره تلگرام: ۰۹۳۶۰۴۷۵۱۲۵

سایت: Lohebartar.ir

پست الکترونیکی: Lohebartar@gmail.com

سامانه پیامکی: ۳۰۰۰۵۳۶۴۰۰۰۵۳۶

# فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله



## آموزش و تمرین

### مجموعه‌های اعداد

معرفی مجموعه: یک دسته کاملاً مشخص و متمایز از اشیاء یا اعداد را مجموعه می‌نامیم. مجموعه‌ها را معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم.

یادآوری چند مجموعه:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

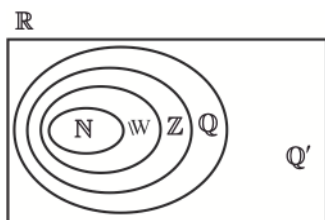
مجموعه اعداد گویا

مجموعه همه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.  $\mathbb{Q}' =$  مجموعه اعداد گنگ

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

مجموعه اعداد حقیقی

نمایش مجموعه‌ها با نمودار ون:



رابطه زیر مجموعه بودن مجموعه‌های فوق به صورت زیر است:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): از نماد ( $=, \neq, \subseteq, \not\subseteq, \in, \notin$ ) استفاده کنید.

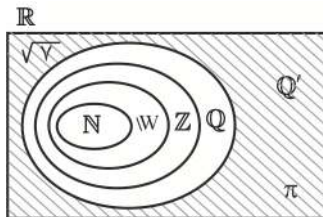
- |   |  |
|---|--|
| الف) $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{Q}$             | ب) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}'$             |
| ج) $2\sqrt{21} \in \mathbb{Z}$                  | د) $3/14 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$        |
| هـ) $\mathbb{R} \in \mathbb{Q}'$                | و) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \in \mathbb{Q}$  |
| ز) $\{0\} \in \mathbb{W} - \mathbb{N}$          | ح) $\mathbb{N} - \mathbb{W} \in \mathbb{Q}'$ |
| ط) $\mathbb{R} \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ |  |

پاسخ:

- |                |                     |                    |
|----------------|---------------------|--------------------|
| الف) $\notin$  | ب) $\notin$         | ج) $\notin$        |
| د) $\in$       | هـ) $\not\subseteq$ | و) $\not\subseteq$ |
| ز) $\subseteq$ | ح) $\subseteq$      | ط) $=$             |

مثال (۲): مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  چه نام دارد؟ آن را روی نمودار ون نمایش دهید و دو عضو دلخواه از آن را بنویسید.

پاسخ:



مجموعه اعداد گنگ ( $\mathbb{Q}'$ ) نام دارد.  $\pi$  و  $\sqrt{7}$  دو عضو از این مجموعه هستند.

مثال (۳): درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- |  |  |
|--|--|
| الف) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ | ب) $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}) \not\subset \mathbb{Q}$ |
|--|--|

پاسخ:








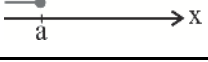

- |           |           |
|-----------|-----------|
| الف) درست | ب) نادرست |
|-----------|-----------|

آموزش و تمرین

بازه‌ها

**تعریف بازه:** زیرمجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$ ، که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را بازه یا فاصله می‌نامیم.

انواع بازه در جدول زیر آورده شده است:  
( $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه و  $a < b$  می‌باشد.)

نمایش به صورت مجموعه	نمایش با نماد بازه	نمایش هندسی (محوری)	نامگذاری بازه
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	$(a, b)$		بازه باز
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$		بازه بسته
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$(a, b]$		بازه نیم‌باز
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a, b)$		بازه نیم‌باز
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x\}$	$(a, +\infty)$		بازه باز
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$	$[a, +\infty)$		بازه نیم‌باز
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	$(-\infty, a)$		بازه باز
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	$(-\infty, a]$		بازه نیم‌باز
$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty, +\infty)$		بازه باز

\* پرانتز نشان می‌دهد که عدد، عضو بازه نمی‌باشد.

\* کروشه نشان می‌دهد که عدد، عضو بازه می‌باشد.

\*  $+\infty$  و  $-\infty$  اعداد حقیقی نیستند و یک نماد محسوب می‌شوند پس برای نمایش آن به صورت بازه، از پرانتز استفاده می‌کنیم.



## مثال و پاسخ

مثال (۱): نوع بازه  $[-2, 0)$  را مشخص کرده و سپس آن را به صورت مجموعه‌ای و هندسی نمایش دهید.

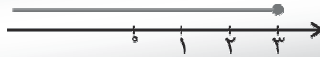
پاسخ:

نوع بازه، نیم‌باز و نمایش مجموعه‌ای و هندسی آن به صورت‌های زیر می‌باشد:

$$[-2, 0) = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 0\}$$



مثال (۲): قسمت‌های مشخص شده روی محور را با نماد بازه و به صورت مجموعه نشان دهید.



پاسخ:

نماد بازه:  $(-\infty, 3]$

نمایش مجموعه‌ای:  $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$

مثال (۳): نوع بازه‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $[1, +\infty)$

ب)  $(-\infty, 1)$

ج)  $(-\infty, +\infty)$

د)  $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$

پاسخ:

د) بسته

ج) باز

ب) باز

الف) نیم‌باز

مثال (۴): درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $\emptyset \subseteq (-2, -1)$

ب)  $6/0.22 \times 10^{23} \in [10, +\infty)$

ج)  $3 \in (-\infty, 3)$

پاسخ:

ج) نادرست

ب) درست

الف) درست

## آموزش و تمرین

## اعمال مجموعه‌ها روی بازه

با توجه به این‌که بازه‌ها مجموعه می‌باشند بنابراین اعمال مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، تفاضل و ...) روی آن‌ها قابل تعریف می‌باشد.

**تمرین:** نمایش هندسی دو بازه  $A = (-2, 3]$  و  $B = (1, 4)$  را روی محور رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

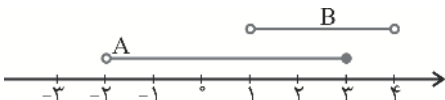
الف)  $A \cap B$

ب)  $A \cup B$

ج)  $A - B$

د)  $B - A$

پاسخ:



الف) این مجموعه شامل همهٔ عضوهایی است که هم در مجموعه  $A$  و هم در مجموعه  $B$  هستند.

$$A \cap B = (1, 3]$$

ب) این مجموعه شامل همهٔ عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشند.

$$A \cup B = (-2, 4)$$

ج) این مجموعه شامل همهٔ عضوهایی است که در مجموعه  $A$  باشند ولی در مجموعه  $B$  نباشند.

$$A - B = (-2, 1]$$

د) این مجموعه شامل همهٔ عضوهایی است که در مجموعه  $B$  باشند ولی در مجموعه  $A$  نباشند.

$$B - A = (3, 4)$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف)  $(-1, 3) \subseteq [-2, 3]$

ب)  $\{-1, 2\} \subseteq (-1, 2)$

ج)  $3 \in \{1, 4\}$

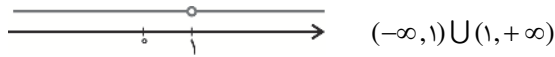
د)  $\sqrt{3} \notin (0, 1)$

پاسخ:

الف) درست      ب) نادرست      ج) نادرست      د) درست

مثال (۲): مجموعه  $\mathbb{R} - \{1\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

پاسخ:

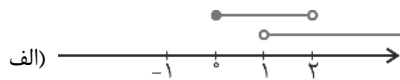


مثال (۳): با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارتها را مشخص کنید.

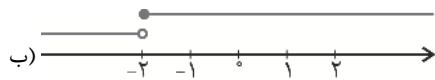
الف)  $(1, +\infty) - [0, 2)$

ب)  $(-\infty, -2) \cup [-2, +\infty)$

پاسخ:



$(1, +\infty) - [0, 2) = [2, +\infty)$



$(-\infty, -2) \cup [-2, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

## آموزش و تمرین

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد، متناهی نامیده می‌شود. به عنوان مثال، مجموعه  $A = \{-1, 0, 1\}$  یک مجموعه متناهی است.

مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌توان با یک عدد بیان کرد، نامتناهی می‌نامیم. به طور معادل مجموعه‌هایی را که متناهی نباشند، مجموعه نامتناهی می‌نامیم. به عنوان مثال، مجموعه  $B = \{-1, 0, 1, \dots\}$  مجموعه‌ای نامتناهی است.

\* تعداد اعضای یک مجموعه نامتناهی از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

\* مجموعه‌های  $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$  و  $\mathbb{R}$  همگی نامتناهی هستند.

\* بازه‌ها، نامتناهی هستند.

\* فرض کنید  $A \subseteq B$ . در این صورت داریم:

الف) اگر  $A$  نامتناهی باشد، آن‌گاه  $B$  نیز نامتناهی است.

ب) اگر  $B$  متناهی باشد، آن‌گاه  $A$  نیز متناهی است.

**تمرین:** دو مجموعه نامتناهی مانند  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و  $B - A$  تک عضوی باشد.

☑ پاسخ:

$\mathbb{N}$  و  $\mathbb{W}$  هر دو نامتناهی هستند و  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$  است، همچنین داریم:

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$$

(یا)

$A = [2, 5)$  و  $B = (2, 5)$  هر دو نامتناهی هستند و  $B \subseteq A$  است، همچنین داریم:

$$[2, 5) - (2, 5) = \{2\}$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

- الف) مجموعه اعداد طبیعی فرد  
 ب) مجموعه برگ‌های درختان شهر مازندران  
 ج) بازه  $(0, \frac{1}{p})$   
 د) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۱۸

پاسخ:

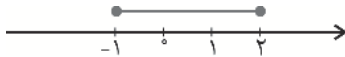
- الف) نامتناهی  
 ب) متناهی  
 ج) نامتناهی  
 د) متناهی

مثال (۲): مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید و سپس متناهی یا نامتناهی بودن آن را بررسی کنید.

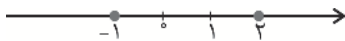
- الف)  $A = [-1, 2]$   
 ب)  $B = \{-1, 2\}$   
 ج)  $C = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 2\}$   
 د)  $D = \{x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 2\}$

پاسخ:

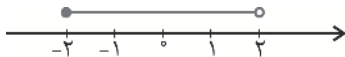
الف) نامتناهی است چون  $-1, 2$  و تمامی اعداد بین آن‌ها را شامل می‌شود.



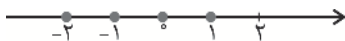
ب) متناهی است. چون فقط اعداد  $-1, 2$  را شامل می‌شود.



ج) نامتناهی است. چون تمامی اعداد بین  $-2, 2$  و خود  $-2$  را شامل می‌شود.



د) متناهی است. چون فقط اعداد صحیح  $1, 0, -1, -2$  را شامل می‌شود.



## آموزش و تمرین

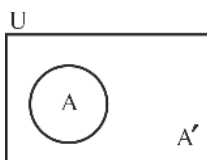
## مجموعه مرجع - متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.

متمم یک مجموعه: هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

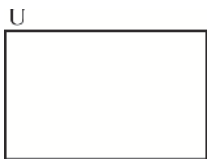
\* با توجه به شکل داریم:



$$1) A \cup A' = U$$

$$2) A \cap A' = \emptyset$$

\* اگر  $U$  مجموعه مرجع باشد:



$$U' = \emptyset$$



$$\emptyset' = U$$

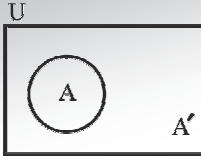
\* اگر مجموعه مرجع متناهی و  $A$  و  $A'$  زیرمجموعه‌های آن باشند،  $A$  و  $A'$  حتماً متناهی هستند.

\* اگر  $U$  مجموعه مرجع نامتناهی و  $A \subseteq U$  متناهی باشد، حتماً  $A'$  نامتناهی است.

\* اگر  $U$  مجموعه مرجع نامتناهی و  $A \subseteq U$  نامتناهی باشد،  $A'$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

## مثال و پاسخ

مثال (۱): با توجه به شکل، عبارت‌های زیر را کامل کنید.



- |                 |                         |                   |
|-----------------|-------------------------|-------------------|
| ۱) $A \cup U =$ | ۵) $A \cup \emptyset =$ | ۹) $A \cup A' =$  |
| ۲) $A \cap U =$ | ۶) $A \cap \emptyset =$ | ۱۰) $A \cap A' =$ |
| ۳) $A - U =$    | ۷) $A - \emptyset =$    | ۱۱) $A - A' =$    |
| ۴) $U - A =$    | ۸) $\emptyset - A =$    | ۱۲) $A' - A =$    |

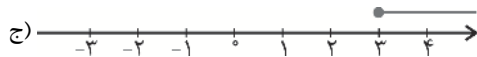
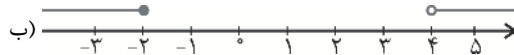
پاسخ:

- |                |                |                 |
|----------------|----------------|-----------------|
| ۱) $U$         | ۵) $A$         | ۹) $U$          |
| ۲) $A$         | ۶) $\emptyset$ | ۱۰) $\emptyset$ |
| ۳) $\emptyset$ | ۷) $A$         | ۱۱) $A$         |
| ۴) $A'$        | ۸) $\emptyset$ | ۱۲) $A'$        |

مثال (۲): اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

- الف)  $\mathbb{W}$       ب)  $(-2, 4]$       ج)  $(-\infty, 3)$

پاسخ:



مثال (۳): اگر  $\mathbb{N}$  را مجموعه مرجع در نظر بگیریم، مجموعه‌ای متناهی مانند  $A$  مثال بزنید و  $A'$  را

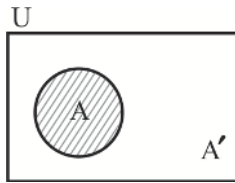
به دست آورید.  $A'$  متناهی است یا نامتناهی؟

پاسخ:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$A' = \{4, 5, 6, \dots\} \rightarrow \text{نامتناهی}$$

## آموزش و تمرین



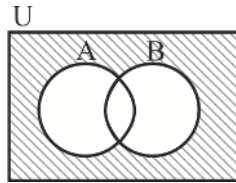
\* متمم متمم هر مجموعه برابر با خود آن مجموعه است.

$$(A')' = A$$

\* متمم اجتماع دو مجموعه، برابر با اشتراک متمم‌های آن دو مجموعه است.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

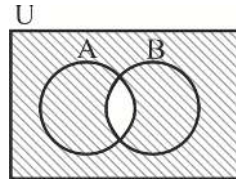
$$(A \cup B)' = U - (A \cup B)$$



\* متمم اشتراک دو مجموعه برابر با اجتماع متمم‌های آن دو مجموعه است.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

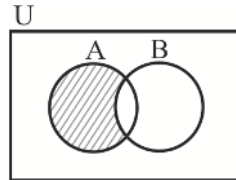
$$(A \cap B)' = U - (A \cap B)$$



\* تفاضل دو مجموعه برابر است با مجموعه اول به جز اشتراک دو مجموعه

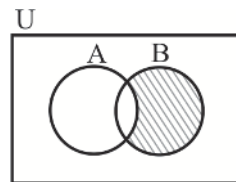
$$A - B = A - (A \cap B)$$

$$A - B = A \cap B'$$



$$B - A = B - (A \cap B)$$

$$B - A = B \cap A'$$







## آموزش و تمرین

## تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

\* تعداد عضوهای هر مجموعه متناهی مانند  $A$  را با  $n(A)$  نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال اگر  $A = \{2, 4, 6, 7\}$  باشد، داریم:

$$n(A) = 4$$

\* اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

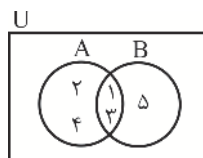
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

**تمرین:** اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{1, 3, 5\}$ ، تعداد عضوهای  $A \cup B$  را بیابید.

پاسخ:

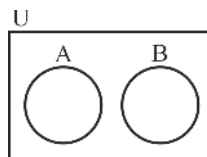
$$n(A) = 4, \quad n(B) = 3, \quad n(A \cap B) = 2$$

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A)}_4 + \underbrace{n(B)}_3 - \underbrace{n(A \cap B)}_2 = 5$$



**تعریف دو مجموعه جدا از هم:** به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه

جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.



$$A \cap B = \emptyset$$

\* اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی دلخواه و جدا از هم باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

به عنوان مثال دو مجموعه  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{c, d\}$  دو مجموعه جدا از هم هستند و داریم:

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A)}_2 + \underbrace{n(B)}_2 = 4$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): اگر  $n(A) = 10$ ،  $n(A \cap B) = 4$  و  $n(A \cup B) = 18$ ، آن گاه  $n(B)$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\underbrace{n(A \cup B)}_{18} = \underbrace{n(A)}_{10} + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_4$$

$$n(B) = 18 - 10 + 4 = 12$$

مثال (۲): فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 90$ ،

$n(A) = 40$ ،  $n(B) = 50$  و  $n(A \cap B) = 10$  مطلوبست:

الف)  $n(A \cup B)$

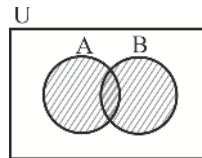
ب)  $n(A \cap B')$

ج)  $n(A' \cap B)$

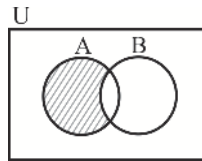
د)  $n(A' \cap B')$

پاسخ:

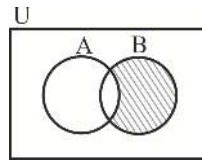
الف)  $n(A \cup B) = \underbrace{n(A)}_{40} + \underbrace{n(B)}_{50} - \underbrace{n(A \cap B)}_{10} = 80$



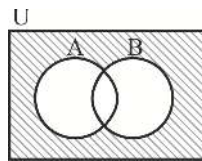
ب)  $n(A \cap B') = n(A - B) = \underbrace{n(A)}_{40} - \underbrace{n(A \cap B)}_{10} = 30$



ج)  $n(A' \cap B) = n(B - A) = \underbrace{n(B)}_{50} - \underbrace{n(A \cap B)}_{10} = 40$



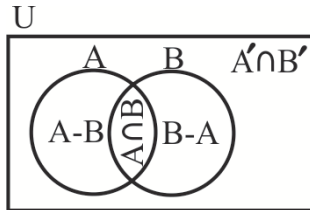
د)  $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = \underbrace{n(U)}_{90} - \underbrace{n(A \cup B)}_{80} = 10$



## آموزش و تمرین

## حل مسائل به کمک مجموعه‌ها

نکات مهم در حل مسائل:



۱)  $A \cup B \rightarrow$  عضوهایی که حداقل (دست‌کم) در یکی از دو مجموعه‌های  $A$  یا  $B$  هستند

۲)  $A \cap B \rightarrow$  عضوهایی که هم عضو مجموعه  $A$  و هم عضو مجموعه  $B$  هستند

۳)  $A - B = A - (A \cap B) \rightarrow$  عضوهایی که فقط در مجموعه  $A$  هستند

۴)  $B - A = B - (A \cap B) \rightarrow$  عضوهایی که فقط در مجموعه  $B$  هستند

۵)  $(A - B) \cup (B - A) \rightarrow$  عضوهایی که دقیقاً در یکی از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  هستند

۶)  $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = A' \cap B' \rightarrow$  عضوهایی که در هیچ‌یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  نیستند

۷)  $(A \cap B)' = U - (A \cap B) = A' \cup B' \rightarrow$  عضوهایی که حداقل در یکی از مجموعه‌های  $A$  یا  $B$  نیستند

یادداشت:

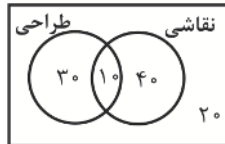
## مثال و پاسخ

**مثال:** در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه، ۴۰ نفر به طراحی و ۵۰ نفر به نقاشی علاقه‌مند هستند. همچنین ۱۰ نفر اعلام کردند که به هر دو رشته علاقه دارند. چه تعدادی از این ۱۰۰ دانش‌آموز:

الف) دست کم به یکی از این دو رشته علاقه دارند؟  
 ب) فقط به طراحی علاقه دارند؟  
 ج) دقیقاً به یکی از این دو رشته علاقه دارند؟  
 د) به هیچ‌یک از این دو رشته علاقه ندارند؟  
 هـ) حداکثر به یکی از این دو رشته علاقه دارند؟

 پاسخ: 

$$U = 100$$


 $A \leftarrow$  طراحی

 $B \leftarrow$  نقاشی

الف)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$= 40 + 50 - 10 = 80$$

ب)  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$$= 40 - 10 = 30$$

ج)  $n(A - B) + n(B - A) = 30 + 40 = 70$

د)  $n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$

هـ)  $n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B) = 100 - 10 = 90$

## آموزش و تمرین

## الگو - الگوی خطی

**تعریف الگو:** الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است.

\* در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

\* برای به دست آوردن جمله  $n$ ام یا جمله عمومی الگو، باید بین شماره جمله و خود جمله رابطه‌ای پیدا کنیم.

\* الگوها به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند.

**تعریف الگوی خطی:** الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوی خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

**تمرین:** کدام یک از رابطه‌های زیر جمله عمومی یک الگوی خطی را مشخص می‌کند؟

الف)  $a_n = n^2 + 1$

ب)  $b_n = 0/3n + 1$

پاسخ:

می‌دانیم جمله  $n$ ام یک الگوی خطی به صورت  $t_n = an + b$  است. بنابراین:

الف) الگوی خطی نیست.

ب) الگوی خطی است.

\* اختلاف دو جمله متوالی در الگوهای خطی، عددی ثابت است. که این عدد، همان شیب خط راست در معادله خط  $(y = ax + b)$  است.

\* ضریب  $n$  در عبارت  $t_n = an + b$ ، همان اختلاف دو جمله متوالی در الگوهای خطی است.

**یادداشت:**

## مثال و پاسخ

مثال (۱): با استفاده از چوب کبریت، شکل زیر را می‌سازیم:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

الف) جدول زیر را کامل کنید.

$n$ : شماره شکل	۱	۲	۳	۴
$t_n$ : تعداد چوب کبریت‌ها	$t_1 =$	$t_2 =$	$t_3 =$	$t_4 =$

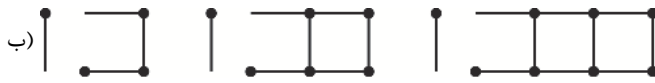
ب) تعداد چوب کبریت‌های به کاررفته در مرحله  $n$  ام را به دست آورید.

ج) به کمک الگوی به دست آمده، تعداد چوب کبریت‌های شکل بیستم را بنویسید.

د) به کمک الگوی به دست آمده، مشخص کنید چندمین شکل دارای ۱۵۱ چوب کبریت است؟

پاسخ:

الف)  $t_1 = 4$  ,  $t_2 = 7$  ,  $t_3 = 10$  ,  $t_4 = 13$



ب)

$$t_1 = 1 + 1(3)$$

$$t_2 = 1 + 2(3)$$

$$t_3 = 1 + 3(3)$$

...

$$t_n = 1 + 3(n) = \boxed{3n + 1}$$

ج)  $t_n = 3n + 1 \xrightarrow{n=20} t_{20} = 3(20) + 1 = 61$

د)  $t_n = 3n + 1 \xrightarrow{t_n=151} 151 = 3n + 1 \rightarrow 3n = 150 \rightarrow n = 50$

مثال (۲): جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت  $t_n = -3n + 5$  می‌باشد. اختلاف دو جمله متوالی این

الگو کدام است؟

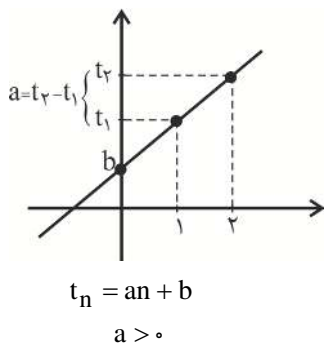
پاسخ:

$$t_n = -3n + 5 \Rightarrow \text{اختلاف دو جمله متوالی} = a = -3$$

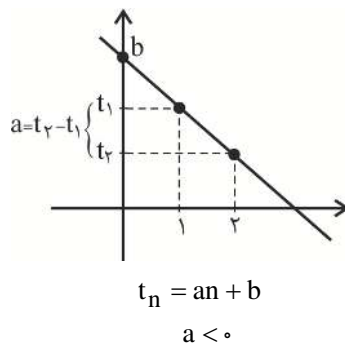
↓  
a

آموزش و تمرین

\* با رسم نمودار الگوی خطی، با جمله  $n$  ام  $t_n = an + b$ ، مشاهده می‌کنیم این نمودار متشکل از نقاطی از خط  $y = ax + b$  است.

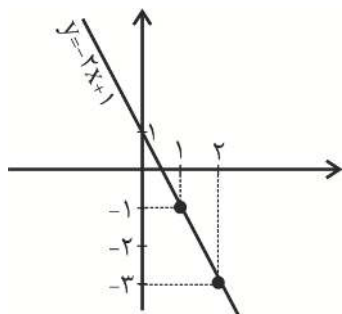


هر جمله از جمله قبل از خودش بزرگ‌تر است.



هر جمله از جمله قبل از خودش کوچک‌تر است.

\* با داشتن دو جمله از یک الگوی خطی می‌توان جمله عمومی الگو را به دست آورد.  
به عنوان مثال اگر جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت  $t_n = -2n + 1$  باشد، هر جمله از این الگو نسبت به جمله قبل از خودش ۲ واحد کوچک‌تر است.  
نمودار این الگوی خطی، نقاطی از خط  $y = -2x + 1$  می‌باشد.





## مثال و پاسخ

مثال (۱): در هریک از قسمت‌های زیر با توجه به الگوهای خطی داده‌شده، ۴ جمله اول را بنویسید، سپس اختلاف دو جمله متوالی را به دست آورید.

الف)  $c_n = 3n - 2$

ب)  $t_n = -2n + 5$

پاسخ:

الف)  $a = 4 - 1 = 3$  → اختلاف دو جمله متوالی  $\rightarrow 1, 4, 7, 10, \dots$

ب)  $a = 1 - 3 = -2$  → اختلاف دو جمله متوالی  $\rightarrow 3, 1, -1, -3, \dots$

مثال (۲): در یک الگوی خطی جمله چهارم ۱۶ می‌باشد. اگر اختلاف دو جمله متوالی این الگو، عدد ۳ باشد، جمله عمومی این الگو را بیابید.

پاسخ:

$a = 3$  → اختلاف دو جمله متوالی

$$t_n = an + b \xrightarrow[\begin{matrix} a=3 \\ t_4=16 \end{matrix}]{\rightarrow} 16 = 3 \times 4 + b \rightarrow b = 4$$

جمله عمومی  $\xrightarrow{t_n=an+b} \boxed{t_n = 3n + 4}$

نکته: برای محاسبه  $b$  کافی است که شماره جمله داده‌شده را در فرمول جمله عمومی جایگذاری کنیم.

مثال (۳): اگر در یک الگوی خطی جمله هشتم برابر ۳۶ و جمله دوازدهم برابر ۵۶ باشد. جمله عمومی الگو را مشخص کنید.

پاسخ:  اگر جمله عمومی به صورت  $t_n = an + b$  باشد. پس داریم:

$$\begin{cases} t_8 = 36 \rightarrow a(8) + b = 36 \\ t_{12} = 56 \rightarrow a(12) + b = 56 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

جمله عمومی  $\rightarrow \boxed{t_n = 5n - 4}$

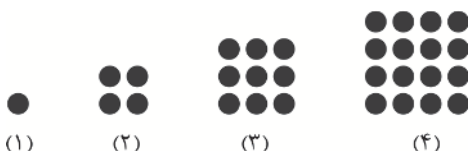
آموزش و تمرین

الگوی غیرخطی

تعریف الگوی غیرخطی: به الگوهایی که خطی نیستند، غیرخطی می‌گوییم.

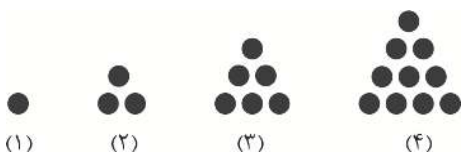
\* معرفی چند الگوی غیرخطی:

(۱) الگوی اعداد مربعی



$$1, 4, 9, 16, \dots \rightarrow t_n = \text{شماره شکل} \times \text{خودش} = n \times n = n^2$$

(۲) الگوی اعداد مثلثی



$$1, 3, 6, 10, \dots \rightarrow t_n = \frac{\text{شماره شکل} (\text{شماره شکل} + 1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(۳) در برخی از الگوها می‌توان از ترکیب دو الگوی مربعی و مثلثی استفاده کرد.

تمرین: با توجه به شکل الگو را بیابید.

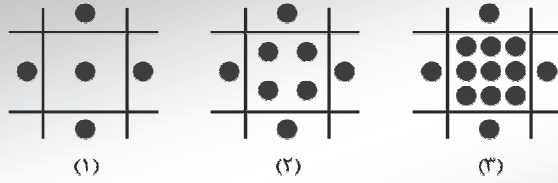


✓ پاسخ: با توجه به دسته‌بندی انجام‌شده در شکل فوق، جمله عمومی، ترکیبی از الگوی مربعی و مثلثی است.

$$t_1 = 1^2 + 1, \quad t_2 = 2^2 + 3, \quad t_3 = 3^2 + 6, \quad \dots, \quad t_n = n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): الگوی زیر را در نظر بگیرید:



الف) شکل بعدی را رسم کنید،

سپس تعداد نقاط هر مرحله را تا

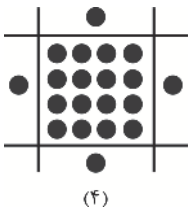
جمله پنجم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

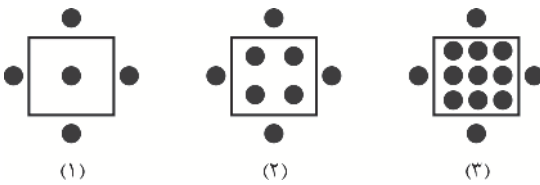
ج) شکل هشتم در این الگو، چند نقطه دارد؟

پاسخ:

الف) ۵، ۸، ۱۳، ۲۰، ۲۹



ب) برای بدست آوردن جمله عمومی، از الگوی اعداد مربعی استفاده می‌کنیم:



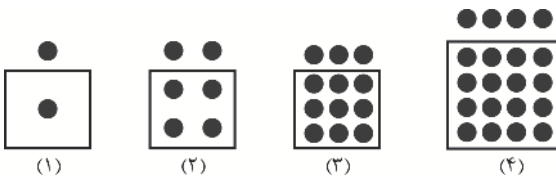
$$t_1 = 1^2 + 4 \quad t_2 = 2^2 + 4 \quad t_3 = 3^2 + 4 \quad \dots \quad t_n = n^2 + 4$$

$$t_n = n^2 + 4 \xrightarrow{n=8} t_8 = 8^2 + 4 = 64 + 4 = 68 \quad \text{ج}$$

مثال (۲): چهار جمله اول الگوی  $a_n = n^2 + n$  را بنویسید و برای آن یک الگوی هندسی ترسیم کنید.

پاسخ:

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2, \quad a_2 = 2^2 + 2 = 6, \quad a_3 = 3^2 + 3 = 12, \quad a_4 = 4^2 + 4 = 20$$



آموزش و تمرین

دنباله - دنباله حسابی

**تعریف دنباله:** هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات

دنباله نامیده می‌شوند. مثل  $1, 2, 3, 4, \dots$  که دنباله اعداد طبیعی می‌باشد.

\* جملات دنباله ممکن است دارای الگو یا فاقد الگو باشند.

مثال (۱) رشته اعداد  $2, 4, 6, \dots$  یک دنباله با الگوی  $t_n = 2n$  می‌باشد.

(۲) رشته اعداد  $1, 2, 1, 0, 1, 3, \dots$  یک دنباله فاقد الگو است.

\* دنباله‌ای را که هر جمله آن نسبت به جمله قبل کمتر نباشد (غیر از جمله اول)، یک دنباله صعودی گویند.

به‌عنوان مثال، دنباله  $1, 3, 5, 7, \dots$  دنباله‌ای صعودی است.

\* دنباله‌ای را که هر جمله آن نسبت به جمله قبل بیشتر نباشد (غیر از جمله اول)، یک دنباله نزولی گویند.

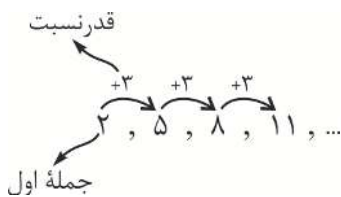
به‌عنوان مثال، دنباله  $8, 5, 2, -1, \dots$  دنباله‌ای نزولی است.

**تعریف دنباله حسابی:** دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله

قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود. که به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله

می‌گویند و آن را با حرف  $d$  نمایش می‌دهند.

مثل:



\* با توجه به تعریف دنباله حسابی، دنباله  $1, 2, 5, 7, \dots$  یک دنباله حسابی نیست.

زیرا:  $a_2 - a_1 = 1 \neq 3 = a_3 - a_2$

\* جمله  $n$ ام یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $d$  به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است.

\* برای نوشتن جمله عمومی یک دنباله حسابی، باید جمله اول و قدرنسبت دنباله را داشته باشیم.

**تمرین:** دنباله حسابی با جمله اول ۵ و قدرنسبت ۳- در نظر گرفته شده است. جمله عمومی این دنباله حسابی را بنویسید.

☑ پاسخ:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow[t=-3]{t_1=5} t_n = 5 + (n-1) \times (-3) = -3n + 8$$



مثال و پاسخ

مثال (۱): اگر جمله عمومی دنباله‌ای به صورت  $a_n = \frac{2n+1}{n}$  باشد در این صورت:  
الف) جمله پنجم آن کدام است؟  
ب) چندمین جمله از آن برابر ۳ می‌باشد؟

پاسخ:

$$\text{الف) } a_n = \frac{2n+1}{n} \xrightarrow{n=5} a_5 = \frac{2(5)+1}{5} \rightarrow a_5 = \frac{11}{5}$$

$$\text{ب) } a_n = \frac{2n+1}{n} \xrightarrow{a_n=3} 3 = \frac{2n+1}{n} \rightarrow 3n = 2n+1 \rightarrow n=1$$

مثال (۲): دو جمله بعدی دنباله‌های زیر را بنویسید و جمله عمومی دنباله را بیابید.

الف)  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots, \dots$       ب)  $-1, 8, -27, \dots, \dots$   
ج)  $0/3, 0/03, 0/003, \dots, \dots$

پاسخ:

الف) $\sqrt{9}, \sqrt{11}$	$t_n = \sqrt{2n+1}$
ب) $64, -125$	$t_n = (-1)^n \times n^3$
ج) $0/0003, 0/00003$	$t_n = 3 \times (0/1)^n$

مثال (۳): کدام یک از دنباله‌های زیر دنباله حسابی است؟ قدرنسبت و جمله عمومی آن را بنویسید.

الف)  $3, 7, 11, 15, \dots$       ب)  $1, 3, 5, 8, \dots$

پاسخ:

الف) دنباله حسابی است و به وضوح  $d = 4$  می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow[t_1=3]{d=4} t_n = 3 + (n-1)4 \rightarrow t_n = 4n - 1$$

ب) دنباله حسابی نیست. زیرا اختلاف جملات متوالی، یکسان نیست.

مثال (۴): الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بنویسید که جمله سوم آن ۱۳ باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ مثال بنویسید.

پاسخ:

الف)  $17, 15, 13, 11, \dots$

الف) به‌طور مثال می‌توان قدرنسبت را عدد  $(-2)$  در نظر گرفت.

ب)  $0, 2, 4, 6, \dots$

ب) جمله اول دنباله را هر عددی می‌توان در نظر گرفت:

آموزش و تمرین

واسطه حسابی

**تعریف واسطه حسابی:** اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، عدد  $b$  واسطه حسابی دو عدد  $a$  و  $c$  می باشد که مقدار آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$2b = a + c \rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

**تمرین (۱):** واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

✓ پاسخ:

$$\begin{array}{ccc} 5 & \square & 11 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$$

$$b = \frac{a + c}{2} \rightarrow b = \frac{11 + 5}{2} = \frac{16}{2} \rightarrow \boxed{b = 8}$$

**تمرین (۲):** در یک دنباله حسابی جمله سوم و ششم به ترتیب ۱۱ و ۲۳ است. با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

✓ پاسخ:

$$\begin{cases} t_3 = 11 \\ t_6 = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 11 \\ t_1 + 5d = 23 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \boxed{t_1 = 3} \quad \boxed{d = 4}$$

جملات دنباله:  $\overset{t_1}{3}, \overset{t_2}{7}, \overset{t_3}{11}, \overset{t_4}{15}, \overset{t_5}{19}, \overset{t_6}{23}, \dots$

$\xrightarrow{+4} \quad \xrightarrow{+4} \quad \xrightarrow{+4} \quad \xrightarrow{+4} \quad \xrightarrow{+4}$

## مثال و پاسخ

مثال (۱): بین دو عدد ۱۲ و ۳۲ سه عدد چنان درج کنید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

پاسخ:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 12 & , & 17 & , & 22 & , & 27 & , & 32 \\
 \downarrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \downarrow \\
 & +5 & & +5 & & +5 & & +5 & \\
 t_1 & & & & & & & & t_5
 \end{array}$$

$$\begin{cases} t_1 = 12 \\ t_5 = 32 \rightarrow t_1 + 4d = 32 \xrightarrow{t_1=12} 12 + 4d = 32 \rightarrow 4d = 20 \rightarrow d = 5 \end{cases}$$

مثال (۲): در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۶- و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۶ است. دنباله را مشخص کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = -6 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 66 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 + \overbrace{t_1 + d}^{t_2} + \overbrace{t_1 + 2d}^{t_3} = -6 \\ \underbrace{t_1 + 3d}_{t_4} + \underbrace{t_1 + 4d}_{t_5} + \underbrace{t_1 + 5d}_{t_6} = 66 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3t_1 + 3d = -6 \\ 3t_1 + 12d = 66 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \boxed{t_1 = -10} , \boxed{d = +8}$$

$$\text{جملات دنباله} \rightarrow -10, -2, 6, 14, 22, 30$$

مثال (۳): مقدار  $m$  را طوری بیابید که اعداد  $2m + 2, 5m - 1, 4m + 8$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند.

پاسخ:

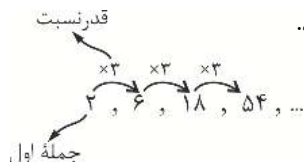
شرط آن که سه جمله  $a, b, c$  تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، این است که  $2b = a + c$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{array}{ccccccc}
 2m + 2 & , & 5m - 1 & , & 4m + 8 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a & & b & & c
 \end{array} \xrightarrow{2b=a+c} 2(5m-1) = 2m+2+4m+8 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

آموزش و تمرین

دنباله هندسی - واسطه هندسی

تعریف دنباله هندسی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبلی از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید، یک دنباله هندسی نامیده می‌شود. به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند و آن را با حرف  $r$  نمایش می‌دهند و جمله اول غیرصفر می‌باشد.  
مثل:



\* با توجه به تعریف دنباله هندسی، دنباله  $3, 5, 7, 1, \dots$  یک دنباله هندسی نیست، زیرا:  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{3} \neq \frac{7}{5} = \frac{a_3}{a_2}$

\* جمله  $n$ ام دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است که در آن  $t_1$  جمله اول و  $r$  قدرنسبت می‌باشد.  
\* برای نوشتن جمله عمومی یک دنباله هندسی، باید جمله اول و قدرنسبت دنباله را داشته باشیم.

**تمرین (۱):** دنباله هندسی با جمله اول ۵ و قدرنسبت ۳- در نظر گرفته شده است. جمله عمومی این دنباله هندسی را بنویسید.

**پاسخ:**  $t_n = t_1 r^{n-1} \xrightarrow[t=-3]{t_1=5} t_n = 5 \times (-3)^{n-1}$

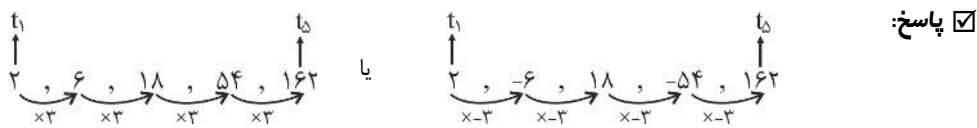
تعریف واسطه هندسی: اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، عدد  $b$  واسطه هندسی دو عدد  $a$  و  $c$  می‌باشد که مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$b^2 = ac$$

**تمرین (۲):** واسطه هندسی بین دو عدد ۴ و ۹ چه عددی است؟

**پاسخ:**  $b^2 = ac \rightarrow b^2 = 4 \times 9 \rightarrow b^2 = 36 \rightarrow b = \pm\sqrt{36} \rightarrow b = \pm 6$

**تمرین (۳):** بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ سه عدد چنان درج کنید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی بدهند.



$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_5 = 162 \rightarrow t_1 r^4 = 162 \xrightarrow{t_1=2} 2 \times r^4 = 162 \rightarrow r^4 = \frac{162}{2} = 81 \rightarrow r = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3 \end{cases}$$



**مثال و پاسخ**

**مثال (۱):** دنباله هندسی روبه‌رو را در نظر بگیرید:  
 الف) قدرنسبت و جمله عمومی دنباله را بنویسید. ب) جمله پنجم این دنباله را بنویسید.

**پاسخ:**  $t_n = t_1 r^{n-1} \xrightarrow[r=\frac{1}{2}]{t_1=4} t_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$   
 الف)  $r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$   
 ب)  $t_n = t_1 r^{n-1} \xrightarrow{n=5} t_5 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \rightarrow t_5 = 4 \times \frac{1}{16} \rightarrow t_5 = \frac{1}{4}$

**مثال (۲):** حاصل ضرب ۲۰ جمله اول دنباله هندسی روبه‌رو را محاسبه کنید.

**پاسخ:**  $3, 9, 27, \dots \rightarrow 3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^{20} = 3^{1+2+3+\dots+20} = 3^{\frac{20(20+1)}{2}} = 3^{210}$

**مثال (۳):** در یک دنباله هندسی، جمله چهارم و هفتم به ترتیب ۱ و ۸ است. با به‌دست‌آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

**پاسخ:**  $\begin{cases} t_4 = 1 \\ t_7 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 r^3 = 1 \\ t_1 r^6 = 8 \end{cases} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌شود}]{\text{جملات بر هم}} \frac{t_1 r^3}{t_1 r^6} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{1}{8} \rightarrow r^3 = 8 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} \rightarrow \boxed{r=2}$

حال مقدار  $r=2$  را در عبارت  $t_1 r^3 = 1$  جایگذاری می‌کنیم و مقدار  $t_1$  را به‌دست می‌آوریم:

$t_1 r^3 = 1 \xrightarrow{r=2} t_1 \times 2^3 = 1 \rightarrow t_1 = \frac{1}{8}$

جملات دنباله:  $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$

**مثال (۴):** به سؤالات زیر پاسخ دهید:  
 الف) دنباله‌ای مثال بنزید که نه حسابی باشد و نه هندسی.  
 ب) دنباله‌ای مثال بنزید که هم حسابی باشد و هم هندسی.

**پاسخ:** الف) دنباله  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  نه حسابی است و نه هندسی.

ب) دنباله  $3, 3, 3, \dots$  هم حسابی است (با قدرنسبت  $d=0$ ) و هم هندسی است (با قدرنسبت  $r=1$ ). چنین دنباله‌هایی را ثابت می‌نامند.

## آموزش و تمرین

## بیش تر بدانیم

\* اجتماع و اشتراک:

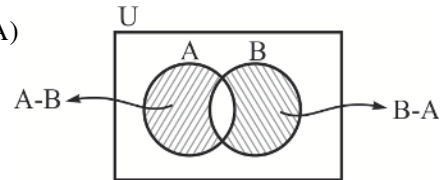
اگر  $n$  عدد طبیعی و  $A_n$  به صورت یک بازه تعریف شود، داریم:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

\* تفاضل متقارن ( $\Delta$ ):

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$



$$n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

یادداشت:

## مثال و پاسخ

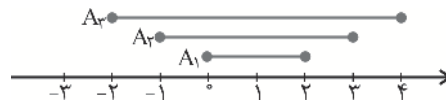
مثال (۱): اگر  $A_n = [-n+1, n+1]$  باشد آن گاه حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف)  $\bigcup_{i=1}^3 A_n$

ب)  $\bigcap_{i=1}^3 A_n$

 پاسخ: 

$$A_n = [-n+1, n+1] \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow A_1 = [0, 2] \\ n=2 \rightarrow A_2 = [-1, 3] \\ n=3 \rightarrow A_3 = [-2, 4] \end{cases}$$



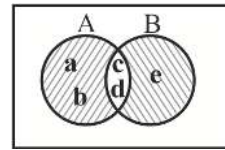
الف)  $\bigcup_{i=1}^3 A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-2, 4]$

ب)  $\bigcap_{i=1}^3 A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [0, 2]$

مثال (۲): اگر  $A = \{a, b, c, d\}$  و  $B = \{c, d, e\}$  آن گاه  $A \Delta B$  را بنویسید.

 پاسخ: 

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{a, b, c, d, e\} - \{c, d\} = \{a, b, e\} \end{aligned}$$



مثال (۳): فرض کنید  $n(A \Delta B) = 13$ ،  $n(A \cap B) = 2$  و  $n(B) = 5$  باشد. مقدار  $n(A)$  را بیابید.

 پاسخ: 

$$\underbrace{n(A \Delta B)}_{13} = n(A) + \underbrace{n(B)}_5 - \underbrace{n(A \cap B)}_2$$

$$n(A) = 13 - 5 + 2 \Rightarrow n(A) = 10$$

آموزش و تمرین

بیشتر بدانیم

رابطه بازگشتی: گاهی برای به دست آوردن جملات یک دنباله لازم است یک یا چند جمله قبل از آن را داشته باشیم یعنی بین هر جمله و جملات ماقبل، یک رابطه وجود دارد. به چنین رابطه‌ای، رابطه بازگشتی می‌گوییم.

مانند دنباله فیبوناتچی که به صورت زیر است:

دنباله فیبوناتچی:  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

جمله عمومی دنباله فیبوناتچی به صورت یک رابطه بازگشتی نوشته می‌شود:

$$\text{جمله عمومی دنباله فیبوناتچی: } \begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

همچنین مجموع  $n$  جمله اول این دنباله برابر با  $a_{n+2} - 1$  می‌باشد.

\* روش به دست آوردن جمله عمومی الگوهای درجه دوم:

- الگوهای درجه دوم به صورت  $t_n = an^2 + bn + c$  می‌باشد.

- اختلاف هر دو جمله متوالی (قدرنسبت) در دنباله حسابی برابر  $2a$  می‌باشد.

- با حل دستگاه ۲ معادله و ۲ مجهول می‌توانیم مقادیر  $b$  و  $c$  را نیز بیابیم.

یادداشت:

## مثال و پاسخ

مثال (۱): با توجه به رابطه بازگشتی داده شده ۴ جمله اول دنباله را بنویسید.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

پاسخ:

$$n = 2 \rightarrow a_2 = a_{2-1} + 3 \rightarrow a_2 = \cancel{2} + 3 = 5$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = a_{3-1} + 3 \rightarrow a_3 = \cancel{5} + 3 = 8$$

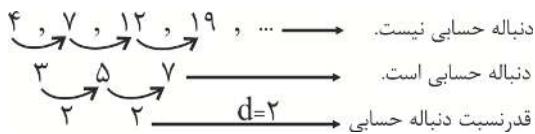
$$n = 4 \rightarrow a_4 = a_{4-1} + 3 \rightarrow a_4 = \cancel{8} + 3 = 11$$

جملات دنباله: ۲، ۵، ۸، ۱۱

مثال (۲): جمله عمومی دنباله درجه دوم زیر را پیدا کنید.

۴، ۷، ۱۲، ۱۹، ...

پاسخ:



با توجه به این که قدرنسبت دنباله حسابی  $2a$  است، پس:

$$2a = d \xrightarrow{d=2} 2a = 2 \rightarrow \boxed{a=1}$$

برای به دست آوردن مقادیر  $b$  و  $c$  از حل دستگاه کمک می‌گیریم.

$$\begin{cases} t_1 = 4 \xrightarrow[n=1]{a=1} \\ t_2 = 7 \xrightarrow[n=2]{a=1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + b(1) + c = 4 \\ 1 \times 4 + 2b + c = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + c = 3 \\ 2b + c = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} \boxed{b=0} \\ \boxed{c=3} \end{cases}$$

$$\text{جمله عمومی: } t_n = an^2 + bn + c \xrightarrow[b=0, c=3]{a=1} \boxed{t_n = n^2 + 3}$$

## آموزش و تمرین

## بیشتر بدانیم

## \* قدرنسبت دنباله حسابی:

اگر جملات  $m$ ام و  $n$ ام یک دنباله حسابی معلوم باشند، برای محاسبه قدرنسبت می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

## \* تعداد جملات در دنباله حسابی:

در دنباله حسابی  $t_1, t_2, \dots, t_n$  برای محاسبه تعداد جملات می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1$$

## \* قدرنسبت دنباله هندسی:

اگر جملات  $m$ ام و  $n$ ام یک دنباله هندسی معلوم باشند، برای محاسبه قدرنسبت می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد.

$$r^{m-n} = \frac{t_m}{t_n}$$

\* گاهی اوقات سه جمله از دنباله حسابی یا هندسی بر حسب مجهول  $x$  داده می‌شود. برای به دست آوردن مقدار مجهول، می‌توان از تعریف واسطه حسابی یا هندسی استفاده کرد.

## مثال و پاسخ

مثال (۱): در یک دنباله حسابی جمله هفتم ۸۱ و جمله چهارم ۳ می‌باشد، قدرنسبت دنباله را بنویسید.

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} t_m = t_7 = 81 \\ t_n = t_4 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow d = \frac{t_m - t_n}{m - n} \rightarrow d = \frac{81 - 3}{7 - 4} = \frac{78}{3} = 26$$

مثال (۲): در دنباله حسابی مقابل تعداد جملات را بیابید. ۳, ۱۰, ۱۷, ..., ۱۴۳

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} d = t_2 - t_1 = 10 - 3 = 7 \\ t_1 = 3 \\ t_n = 143 \end{array} \right\} \rightarrow n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 \rightarrow n = \frac{143 - 3}{7} + 1 \rightarrow n = 20 + 1 = 21$$

مثال (۳): در یک دنباله هندسی جمله هفتم ۸۱ و جمله چهارم ۳ می‌باشد، قدرنسبت دنباله را بنویسید.

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} t_m = t_7 = 81 \\ t_n = t_4 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow r^{m-n} = \frac{t_m}{t_n} \rightarrow r^{7-4} = \frac{81}{3} \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = 3$$

مثال (۴): اگر  $2x - 2$  و  $x + 2$  و  $x$  جمله‌های متوالی دنباله حسابی باشند مقدار  $x$  را بیابید.

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} a = x \\ b = x + 2 \\ c = 2x - 2 \end{array} \right\} \rightarrow 2b = a + c \rightarrow 2(x + 2) = x + (2x - 2)$$

$$\rightarrow 2x + 4 = x + 2x - 2 \rightarrow x = \frac{6}{4-2} \rightarrow \boxed{x = 6}$$

جملات دنباله: ۶, ۸, ۱۰

مثال (۵): اگر  $x + 4$  و  $x + 1$  و  $x - 3$  جمله‌های متوالی دنباله هندسی باشند، مقدار  $x$  را بیابید.

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} a = x - 3 \\ b = x + 1 \\ c = x + 4 \end{array} \right\} \rightarrow b^2 = ac \rightarrow \underbrace{(x + 1)^2}_{\text{اتحاد مربع}} = (x - 3)(x + 4)$$

$$\rightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} + x - 12 \rightarrow 2x - x = -12 - 1 \rightarrow \boxed{x = -13}$$

جملات دنباله: -۱۶, -۱۲, -۹

## تست‌های فصل اول

تست‌های این بخش، مهارت تست‌زنی شما را افزایش می‌دهند اما برای پاسخگویی به سؤالات تستی تألیفی و کنکوری بیش‌تر باید از کتاب دوم این مجموعه به نام «تست ریاضی فست‌بوک دهم» استفاده کنید.

۱- چه تعداد از روابط زیر صحیح است؟

الف)  $W \subseteq Z$       ب)  $Q \subseteq N$       ج)  $W - N = \emptyset$

د)  $W \cap Z \subseteq W$       هـ)  $Q - R = \emptyset$

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۲- اگر  $(-\infty, -m-1] \cap [2m+5, +\infty)$  یک مجموعه تک‌عضوی باشد،  $m$  کدام است؟

۲ (۱)      -۲ (۲)      ۱ (۳)      ۴ (۴) صفر

۳- اگر  $[1, 5] = [2, x] \cup [y, 4]$ ، آن‌گاه حاصل  $x^2 + y^2$  کدام است؟

۲۶ (۱)      ۲۲ (۲)      ۲۰ (۳)      ۱۶ (۴)

۴- اگر  $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\}$  و  $B = \left\{ \frac{x}{\lambda} \mid x \in N \right\}$  مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(سراسری انسانی ۹۶)

۱)  $A - B$       ۲)  $B - A$       ۳)  $A \cup B$       ۴)  $A \cap B$

۵- اگر  $n \in N$ ،  $A_n = \{m \in Z \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$  باشد، مجموعه  $A_1 \cup (A_8 - A_4)$  چند عضو دارد؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۸ (۴)

۶- اگر  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  مجموعه مرجع،  $A = \{x \in U \mid x \text{ مضرب } 3\}$  و  $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ، آن‌گاه تعداد

عضوهای کدام مجموعه از بقیه بیش‌تر است؟

۱)  $A' - B'$       ۲)  $B - A$       ۳)  $A \cup B$       ۴)  $(A \cap B)'$

۷- کدام گزینه صحیح است؟ ( $U$  مجموعه مرجع نامتناهی است.)

۱) اگر  $A$  نامتناهی باشد، آن‌گاه  $A'$  نامتناهی است.

۲) اگر  $A$  و  $B$  نامتناهی باشند، آن‌گاه  $A - B$  متناهی است.

۳) اگر  $A \subseteq B$ ، آن‌گاه  $A' \subseteq B'$  می‌باشد.

۴) اگر  $B$  متناهی باشد و  $A \subseteq B$ ، آن‌گاه  $A' \cup B'$  نامتناهی است.

۸- در جشن تولد بهار، ۴۴ نفر از دوستانش شرکت کرده‌اند. در این جشن ۲۵ نفر پرتقال، ۱۱ نفر سیب، ۹ نفر

بستنی خورده‌اند. در صورتی که ۴ نفر سیب و پرتقال خورده باشند و هیچ‌کدام از آن‌هایی که پرتقال خورده‌اند بستنی

نخورده باشند و ۴ نفر چیزی نخورده باشند، چند نفر سیب و بستنی خورده‌اند؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)



۹- اگر  $n(A \Delta B) = 12$ ،  $n(A \cap B) = 2$  و  $n(B) = 5$  باشد، در این صورت  $n(A)$  کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۱۰- با توجه به الگوی داده‌شده، مجموع جملات هفتم و یازدهم کدام است؟



۱۸۳ (۱)  
۱۷۴ (۲)  
۱۶۸ (۳)  
۱۶۵ (۴)

۱۱- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد.

...، (۷، ۹، ۱۱)، (۱، ۳، ۵)، جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۱)

- ۴۲۳ (۱) ۴۲۱ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۱۵ (۴)

۱۲- در یک دنباله حسابی  $10 = 3a_4 + a_2 + 2a_1$ ، قدرنسبت این دنباله چقدر است؟ (آزاد پزشکی ۹۰)

- ۲ (۱) -۲ (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $-\frac{5}{4}$  (۴)

۱۳- بین دو عدد ۱۱- و ۳۴ چهار واسطه حسابی درج کرده‌ایم. جمله سوم دنباله صعودی حاصل، برابر است با:

- ۷ (۱) ۱۶ (۲)  $\frac{37}{5}$  (۳)  $\frac{14}{5}$  (۴)

۱۴- در دو دنباله حسابی به صورت‌های  $2, 7, 12, \dots$  و  $8, 11, 14, \dots$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

(خارج از کشور ریاضی ۹۴)

- ۵۷ (۱) ۵۸ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴)

۱۵- در یک دنباله هندسی  $a_5 = 12$  و  $a_8 = 48$ ، جمله سیزدهم این دنباله کدام است؟

- ۸۴ (۱) ۱۹۲ (۲) ۱۹۸ (۳) ۲۰۲ (۴)

۱۶- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و

بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۱۷- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند،

قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

- $\frac{7}{3}$  (۱)  $\frac{7}{4}$  (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)

۱۸- اعداد  $2^a$ ،  $4\sqrt{2}$  و  $2^b$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند. واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۷)

- $\frac{2}{5}$  (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)

۱۹- در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم، می‌توانند سه جمله متوالی از یک

دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌هاست؟ (خارج از کشور تجربی ۹۲)

- $2 + \sqrt{3}$  (۱)  $5 + 2\sqrt{3}$  (۲)  $7 + 4\sqrt{3}$  (۳)  $5 + 4\sqrt{3}$  (۴)

۲۰- در دنباله  $u_1 = u_2 = 1$  و  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ، حاصل  $U_n^2 - U_{n+1} \times U_{n-1}$  کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

- $(-1)^n$  (۱)  $(-1)^{n+1}$  (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

## پاسخ تشریحی تست‌های فصل اول

۱- گزینه «۳»

الف، د، هـ صحیح می‌باشد.

ب، ج غلط می‌باشد.

۲- گزینه «۲»

کافیست نقطه انتهایی بازه اول را با نقطه ابتدای بازه دوم مساوی قرار دهیم و معادله را حل کنیم:

$$-m - 1 = 2m + 5 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

۳- گزینه «۱»

$$[2, x] \cup [y, 4] = [1, 5] \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 26$$

۴- گزینه «۴»

ابتدا مجموعه A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, \dots \right\}$$

$$A \cap B = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\} \text{ متناهی}$$

۵- گزینه «۳»

$$A_1 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -1, 2^m \leq 2 \} = \{ 0, 1 \}$$

$$A_4 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -4, 2^m \leq 8 \} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

$$A_8 = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -8, 2^m \leq 16 \} = \{ -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

$$(A_8 - A_4) \cup A_1 = \{ -7, -6, -5, -4, 4 \} \cup \{ 0, 1 \} = \{ -7, -6, -5, -4, 0, 1, 4 \}$$

بنابراین دارای ۷ عضو است.

✓ ۶- گزینه «۴»

$$A' - B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{7, 8, 10\} \Rightarrow n(A' - B') = 3$$

$$B - A = \{6, 7, 8, 9, 10\} - \{3, 6, 9\} = \{7, 8, 10\} \Rightarrow n(B - A) = 3$$

$$A \cup B = \{3, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(A \cup B) = 6$$

$$(A \cap B)' = (\{6, 9\})' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10\} \Rightarrow n((A \cap B)') = 8$$

✓ ۷- گزینه «۴»

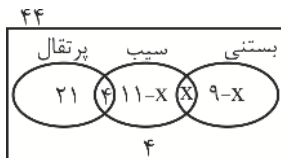
$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \Rightarrow A' \cup B' = A'$$

در گزینه ۴ داریم:

با توجه به متناهی بودن B و در نتیجه نامتناهی بودن B'، پس  $A' = A' \cup B'$  نامتناهی است.

✓ ۸- گزینه «۱»

راه حل اول: این سؤال را به راحتی با استفاده از نمایش نمودار ون می توان پاسخ داد:



$$21 + 4 + 11 - x + x + 9 - x + 4 = 44 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

همان طور که مشاهده می کنید، برای محاسبه x داریم:

راه حل دوم: با استفاده از فرمول اجتماع مجموعه‌ها، رابطه زیر را برای مسئله می نویسیم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$44 - 4 = 25 + 11 + 9 - 4 - 0 - x + 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

✓ ۹- گزینه «۳»

$$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

$$12 = n(A) + 5 - 2 \times 2 \Rightarrow \boxed{n(A) = 11}$$

✓ ۱۰- گزینه «۲»

در شکل‌های داده شده، مجموعه‌های وسط از یک الگو و اطراف آن از الگوی ثابت پیروی می کنند و داریم:

$$\begin{array}{ccc} 1+2 & , & 4+2 & , & 9+2 & , & \dots \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \\ \text{اطراف وسط} & & \text{اطراف وسط} & & \text{اطراف وسط} & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{جمله عمومی} \quad a_n = n^2 + 2$$

$$a_7 + a_{11} = (7^2 + 2) + (11^2 + 2) = 174$$

بنابراین مجموع جملات هفتم و یازدهم برابر است با:

## ۱۱- گزینۀ «۳»

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

(۱)      (۲)      (۳)      (۴)

برای به‌دست‌آوردن اولین عدد هر دسته کافیت ارتباط بین شماره‌های دسته و عدد مورد نظر را بیابیم:

$$\text{اولین جمله دسته اول: } 1 \times 0 + 1 = 1$$

$$\text{اولین جمله دسته دوم: } 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$\text{اولین جمله دسته سوم: } 3 \times 2 + 1 = 7$$

$$\text{اولین جمله دسته } n \text{ ام: } n \times (n-1) + 1$$

$$\text{اولین جمله دسته } 21 \text{ ام: } 21 \times 20 + 1 = 421$$

$$\text{عدد مورد نظر} = 421 - 2 = 419$$

## ۱۲- گزینۀ «۴»

با توجه به  $a_n = a + (n-1)d$  داریم:

$$2a_1 + a_1 + 1d - 3(a_1 + 2d) = 10 \Rightarrow -8d = 10 \Rightarrow d = -\frac{5}{4}$$

## ۱۳- گزینۀ «۱»

$$-11, 0, 0, 0, 0, 34$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶)

$$d = \frac{34 - (-11)}{6 - 1} = \frac{45}{5} = 9$$

بنابراین جملات دنباله به‌صورت زیر می‌باشند:

$$-11, -2, 7, 16, 25, 34$$

↓  
جمله سوم

## ۱۴- گزینۀ «۴»

$$2, 7, 12, \boxed{17}, 22, \dots \Rightarrow d_1 = 5$$

$$8, 11, 14, \boxed{17}, 20, \dots \Rightarrow d_2 = 3$$

قدرنسبت دنباله جملات مشترک، برابر با ک.م.م قدرنسبت‌هاست. بنابراین جمله عمومی دنباله جملات مشترک به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} d = \text{ک.م.م قدرنسبت‌ها} = 15 \\ \text{جمله اول} = 17 \end{cases} \Rightarrow a_n = 15n + 2$$

$$100 \leq 15n + 2 \leq 999$$

تعداد جملات سه رقمی:

$$6/53 \leq n \leq 66/46$$

بنابراین ۶۰ عدد سه رقمی مشترک داریم.

## ۱۵- گزینه «۲» ✓

$$\begin{cases} r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r^4 = \frac{a_9}{a_5} = \frac{48}{12} = 4 \\ a_5 = a_1 r^4 = 12 \Rightarrow a_1 \times 4 = 12 \Rightarrow a_1 = 3 \\ a_{13} = a_1 r^{12} = a_1 (r^4)^3 = 3 \times 4^3 = 192 \end{cases}$$

## ۱۶- گزینه «۲» ✓

سه جمله متوالی از دنباله هندسی را به صورت زیر در نظر گرفته و برای آن شرط تشکیل دنباله هندسی (واسطه هندسی) را می‌نویسیم:

$$a, b, c \Rightarrow b^2 = ac$$

$$\begin{cases} abc = 216 \Rightarrow b^3 = 216 \Rightarrow b = 6 \\ a + b + c = 19 \xrightarrow{b=6} a + c = 13 \end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a \times c = 36 \\ a + c = 13 \end{cases}$$

بنابراین:

به وضوح  $a$  و  $c$ ، دو عدد ۴ و ۹ می‌باشند.

$$4, 6, 9 \Rightarrow (کوچک‌ترین عدد) - (بزرگ‌ترین عدد) = 9 - 4 = 5$$

## ۱۷- گزینه «۱» ✓

راه‌حل اول: با توجه به جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$a_2, a_5, a_{12}$$

$$a_1 + d, a_1 + 4d, a_1 + 11d$$

شرط تشکیل دنباله هندسی (واسطه هندسی):

$$(a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d) \times (a_1 + 11d) \Rightarrow \Delta d^2 - 4ad = 0 \Rightarrow d(\Delta d - 4a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ d = \frac{4}{\Delta} a \end{cases}$$

$$d = 0 \Rightarrow a_1, a_1, a_1 \Rightarrow r = 1$$

$$d = \frac{4}{\Delta} a \Rightarrow \frac{4}{5} a \Rightarrow \frac{4}{5} a, \frac{21}{5} a, \frac{49}{5} a \Rightarrow r = \frac{7}{3}$$

با جایگزینی مقدار  $d$  در جملات دنباله فوق داریم:

راه‌حل دوم: اگر  $a_k, a_L, a_m$  ( $k < L < m$ ) سه جمله از یک دنباله حسابی، جملات متوالی از یک دنباله هندسی باشند آن‌گاه قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = \frac{m-L}{L-k} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = \frac{12-5}{5-2} = \frac{7}{3} \end{cases} \end{cases}$$

## ۱۸- گزینۀ «۱»

$$r^a, 4\sqrt{2}, 2b \xrightarrow[\text{(واسطه هندسی)}]{\text{دنباله هندسی}} (4\sqrt{2})^2 = r^a \times 2b \Rightarrow 32 = r^{a+b} \Rightarrow \boxed{a+b=5}$$

واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  برابر است با:

$$\text{واسطه حسابی} = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

## ۱۹- گزینۀ «۳»

با توجه به فرض مسئله، شرط تشکیل دنباله حسابی (واسطه حسابی) را می‌نویسیم:

$$a_7, 2a_5, a_8 \Rightarrow 2(2a_5) = a_7 + a_8 \Rightarrow 4(ar^4) = ar + ar^7$$

$$\Rightarrow r^6 - 4r^3 + 1 = 0 \xrightarrow[r^3=t]{(*)} t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow r^3 = t = 2 \pm \sqrt{3}$$

نسبت بزرگ‌ترین این سه عدد به کوچک‌ترین آن‌ها برابر است با:

$$\frac{a_8}{a_7} = r^{8-7} = r^1 = r \Rightarrow (r^3)^2 = (2 \pm \sqrt{3})^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

(\*) حل معادله درجه دوم را در فصل ۴ می‌خوانیم.

## ۲۰- گزینۀ «۲»

ابتدا جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

$$U_n - U_{n+1} \times U_{n-1} \rightarrow \begin{cases} n=2 \Rightarrow 1^2 - 2 \times 1 = -1 \\ n=3 \Rightarrow 2^2 - 3 \times 1 = +1 \\ n=4 \Rightarrow 3^2 - 5 \times 2 = -1 \\ n=5 \Rightarrow 5^2 - 8 \times 3 = +1 \\ \vdots \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم جملات عبارت مطلوب از فرمول  $(-1)^{n+1}$  پیروی می‌کنند.

برای افزایش مهارت تست‌زنی به کتاب «تست ریاضی فست‌بوک دهم»  
انتشارات لوح پرت‌ر مراجعه کنید.

**آزمون**

**نوبت اول**

ردیف	سؤالات	بارم
۱	<p>در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) اگر <math>A \subseteq B</math> و <math>B</math> مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه <math>A</math> مجموعه‌ای ..... خواهد بود.</p> <p>ب) حاصل <math>\sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ</math> برابر ..... است.</p> <p>ج) حاصل <math>\sqrt[3]{-0/01} \times \sqrt[3]{2/7}</math> برابر ..... است.</p> <p>د) اگر <math>(-3, 7)</math> و <math>(0, 7)</math> دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن به صورت <math>x = \dots</math> می‌باشد.</p>	۱
۲	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>۱) اگر تمام اعضای مجموعه اعداد حسابی را قرینه کنیم، کدام مجموعه به دست می‌آید؟ الف) <math>\mathbb{Q} - \mathbb{N}</math>    ب) <math>\mathbb{Z} - \mathbb{N}</math>    ج) <math>\mathbb{Z} - \mathbb{W}</math>    د) <math>\mathbb{W} - \mathbb{N}</math></p> <p>۲) اگر <math>\tan \theta &lt; 0</math> و <math>\sin \theta &gt; 0</math> باشد، آن‌گاه زاویه <math>\theta</math> در کدام ربع قرار دارد؟ الف) اول    ب) دوم    ج) سوم    د) چهارم</p> <p>۳) حاصل عبارت <math>(x-1)(x^2+x+1)+1</math> کدام است؟ الف) <math>x^3</math>    ب) <math>(x-1)^3</math>    ج) <math>x^3-1</math>    د) <math>x^3+1</math></p> <p>۴) طول رأس سهمی <math>y = 2x^2 - 4x</math> برابر کدام است؟ الف) ۱    ب) -۱    ج) ۲    د) -۲</p>	۱
۳	<p>درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.</p> <p>ب) شیب خطی که با محور <math>x</math> زاویه <math>30^\circ</math> می‌سازد، برابر <math>\frac{\sqrt{3}}{3}</math> است.</p> <p>ج) اگر <math>n</math> زوج باشد آن‌گاه <math>(\sqrt[n]{a})^n = a</math> است.</p> <p>د) معادله <math>x^2 - 6x + 9 = 0</math> دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.</p>	۱
۴	<p>به سؤالات زیر به صورت کوتاه پاسخ دهید.</p> <p>الف) جمله عمومی الگوی روبه‌رو را بیابید.</p> <p>ب) زاویه <math>65^\circ</math> بین کدام زوایای مرزی قرار دارد.</p> <p>ج) عبارت <math>x^3 - 8</math> را تجزیه کنید.</p> <p>د) جواب معادله <math>x^2 + 5 = 0</math> را به کمک ریشه‌گیری به دست آورید.</p>	۲



**آزمون**

**نوبت دوم**

ردیف	سؤالات	بارم
۱	<p>در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) حاصل عبارت <math>\sqrt[3]{\sqrt{64}}</math> برابر با ..... است.</p> <p>ب) حاصل عبارت <math>\frac{n!}{(n-1)!}</math> برابر ..... است.</p> <p>ج) اگر <math>f(x) = 4x + 1</math> باشد، <math>f(-2)</math> برابر ..... است.</p> <p>د) تعداد اعضای جامعه را ..... جامعه می‌گویند.</p>	۱
۲	<p><b>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</b></p> <p>۱) تابعی مانند <math>f</math> را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ..... می‌نامیم.</p> <p>الف) همانی      ب) ثابت      ج) قدرمطلق      د) چندجمله‌ای</p> <p>۲) دامنه تابع <math>f(x) = x^2 + 1</math> برابر است با:</p> <p>الف) <math>\mathbb{R}</math>      ب) <math>\mathbb{R} - \{-1\}</math>      ج) <math>\mathbb{R} &lt; 0</math>      د) <math>\mathbb{R} &gt; 0</math></p> <p>۳) با ارقام <math>(4, 3, 2, 1, 0)</math> چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟</p> <p>الف) ۲۰      ب) ۶۰      ج) ۴۰      د) ۳۰</p> <p>۴) ۷ نفر که سه تایی آن‌ها خواهر هستند، در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال سه خواهر در اول، وسط و آخر صف قرار می‌گیرند؟</p> <p>الف) <math>\frac{1}{35}</math>      ب) <math>\frac{2}{7}</math>      ج) <math>\frac{1}{21}</math>      د) <math>\frac{3}{7}</math></p>	۱
۳	<p><b>درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.</b></p> <p>الف) عبارت <math>(\sqrt[4]{-3})^4</math> با <math>\sqrt[4]{(-3)^4}</math> برابر است.</p> <p>ب) تابعی که حجم یک کره را برحسب شعاع آن نمایش می‌دهد، یک تابع همانی است.</p> <p>ج) ۷۲ حالت مختلف برای پرتاب ۲ تاس و یک سکه وجود دارد.</p> <p>د) تحلیل و تفسیر داده‌ها یکی از مراحل علم آمار است.</p>	۱
۴	<p><b>به سؤالات زیر به صورت کوتاه پاسخ دهید.</b></p> <p>الف) در دنباله‌ی هندسی <math>\dots, 24, x, 6</math> مقدار <math>x</math> چند است؟</p> <p>ب) اگر <math>\tan \alpha = \frac{3}{4}</math> و <math>\alpha</math> زاویه‌ای در ربع سوم باشد، مقدار <math>\cos \alpha</math> را تعیین کنید.</p> <p>ج) رأس سهمی <math>y = (x + 3)^2 - 1</math> را بنویسید.</p> <p>د) یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند ولی تابع همانی نباشد.</p>	۲

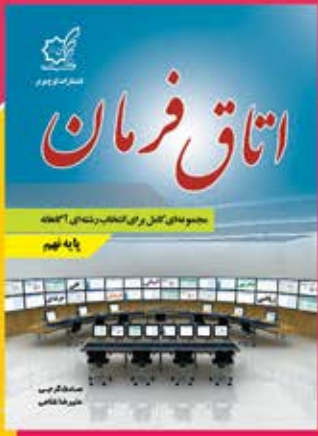


ایکیوسان هشتم



ایکیوسان هفتم

## لوح برتر انتخاب برتر ✓



اتاق فرمان نهم



ایکیوسان نهم

تهران، انقلاب، خیابان فخررازی، نبش ماستری فراهانی، پلاک ۲۸  
Lohebartar.ir ۰۲۱-۶۶۱۷۵۰۵۳ ۶۶۹۷۱۹۷۰ تلفن:  
lohebartar@gmail.com ۶۶۹۷۱۸۰۴  
@Lohebartarpub

ISBN:978-600-7412-31-2



9 786007 412312